Unendliche Potenzen

Thomas Peters
Thomas' Mathe-Seiten
www.mathe-seiten.de

7. August 2010

In diesem Artikel werden wir uns einem zunächst bizarr anmutenden Thema widmen, nämlich den unendlichen Kettenbrüchen, unendlichen Wurzelausdrücken und unendlichen Potenzen. Sie werden sich jedoch, z. B. im Artikel über Fibonacci-Zahlen, als sehr nützlich erweisen. Außerdem macht es einen Riesenspaß, die einfachsten Dinge möglichst kompliziert hinzuschreiben!

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Unendliche Kettenbrüche

1.1 Definitionen

Ausdrücke der Form

$$r = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{\cdots}}}$$

bezeichnet man als *allgemeinen Kettenbruch*. Diese können endliche oder unendliche Länge haben. Sind die Zähler immer 1, also $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = \cdots = 1$, so spricht man von einem *einfachen Kettenbruch*

$$r = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots}}}.$$

Für sie existiert die Kurzschreibweise $r = [a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots]$. Dabei ist zu beachten, dass die a_k positiv sind für $k > 0$.

1.2 Rationale und reelle Zahlen

Als Beispiel werden wir einmal eine rationale Zahl, sagen wir 56/23, in einen einfachen Kettenbruch umwandeln. Das geht folgendermaßen:

$$\frac{56}{23} = 2 + \frac{10}{23} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{23}{10}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3}{10}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{10}{3}}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3}}} = [2; 2, 3, 3].$$

Allgemein lässt sich eine beliebige rationale Zahl mit Hilfe folgendes Algorithmus in einen Kettenbruch umwandeln:

$$\begin{aligned} a_k =& [r_k] \\ r_k =& \frac{1}{r_{k-1} - a_{k-1}}, \end{aligned}$$

wobei [ ] die Gauß-Klammer ist. Dieser Algorithmus ist genau das, was wir vorhin gemacht haben, nur allgemein hingeschrieben. Beispiel:

$$\begin{aligned}
r =& 1{,}3\\
a =& [r] = 1\\
r =& \frac{1}{1{,}3-1} = 3\frac{1}{3}\\
a =& [r] = 3\\
r =& \frac{1}{3\frac{1}{3}-3} = 3\\
a =& [r] = 3
\end{aligned}$$

Das Ergebnis ist also $r = [1; 3, 3]$.

Der Kettenbruch $[1; 3, 2, 1]$ ist ebenfalls gleich r, per Konvention sind aber nur solche Kettenbrüche zulässig, die nicht auf 1 enden.

Auf diese Weise kann jeder rationalen Zahl eineindeutig ein einfacher, endlicher Kettenbruch zugewiesen werden. Auch auf *irrationale Zahlen* kann dieser Algorithmus angewendet werden. Dann kommt allerdings ein nicht abbrechender, also unendlicher Kettenbruch heraus. Das führt uns auf folgende Sätze:

- Eine Zahl ist genau dann rational, wenn ihre Darstellung als einfacher Kettenbruch endlich ist.
- Eine Zahl ist genau dann irrational, wenn ihre Darstellung als einfacher Kettenbruch unendlich ist.

Kettenbrüche stellen eine Art „beste Näherung“ für irrationale Zahlen dar. In Abbildung 1.1 sind die ersten 10 Näherungen für die Kreiszahl π auf 20 Stellen genau und die Abweichung vom exakten Wert dargestellt. Wie man sieht, konvergiert der Kettenbruch sehr rasch.

1.3 Sonderfälle

So, jetzt wissen wir, wie wir eine beliebige reelle Zahl (zumindest näherungsweise) in einen einfachen Kettenbruch umwandeln können. Aber wie sieht es anders herum aus? Welchen Wert hat der unendliche Kettenbruch $[1; 1, 1, 1, ...]$?

i	i-te Näherung (Bruch)	i-te Näherung (dezimal)	Fehler
1	3	3,0	$1{,}41593 \cdot 10^{-1}$
2	22/7	3,142857142857142857142857142 86	$-1{,}26449 \cdot 10^{-3}$
3	333/106	3,1415094339622641509433962264 2	$8{,}32196 \cdot 10^{-5}$
4	355/113	3,1415929203539823008849557522 1	$-2{,}66764 \cdot 10^{-7}$
5	103993/33102	3,1415926530119026040722614947 7	$5{,}77891 \cdot 10^{-10}$
6	104348/33215	3,1415926539214210447087159415 9	$-3{,}31628 \cdot 10^{-10}$
7	208341/66317	3,1415926534674367055204547853 5	$1{,}22356 \cdot 10^{-10}$
8	312689/99532	3,1415926536189366233975003014 1	$-2{,}91434 \cdot 10^{-11}$
9	833719/265381	3,1415926535810777712044193065 8	$8{,}71525 \cdot 10^{-12}$
10	1146408/364913	3,1415926535914039784825424142 2	$-1{,}61071 \cdot 10^{-12}$

Abbildung 1.1: Approximation von π durch Kettenbrüche.

Setzen wir $r = [1; 1, 1, 1...]$, so können wir folgende Umformungen machen:

$$
\begin{aligned}
r &= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cdots}}} \\
\Rightarrow \quad r &= 1 + \frac{1}{r} \\
\Rightarrow \quad r^2 - r - 1 &= 0 \\
\Rightarrow \quad r &= \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})
\end{aligned}
$$

Da wir wissen, dass der Kettenbruch positiv ist, kommt nur noch die positive Lösung der quadratischen Gleichung in Frage und wir erhalten $r = \varphi$. Das heißt: Der einfachste mögliche unendliche Kettenbruch ist der *Goldene Schnitt*!

Allgemein erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
r &= a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{\cdots}}} \\
\Rightarrow \quad r &= a + \frac{b}{r} \\
\Rightarrow \quad r^2 - ar - b &= 0 \\
\Rightarrow \quad r &= \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}
\end{aligned}
$$

Jetzt können wir ohne Probleme den Wert des Kettenbruchs $[a; a, a, a, \ldots]$ bestimmen:

$$r = a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{\cdots}}} \Rightarrow r = \frac{a \pm \sqrt{a^2+4}}{2}$$

Für $[2; 2, 2, 2, 2, \ldots]$ erhält man z. B. $1 + \sqrt{2}$. Den Wert des Bruchs $r = [1; 2, 2, 2, \ldots]$ können wir nun berechnen mit

$$[1; 2, 2, 2, \ldots] = [2; 2, 2, 2, \ldots] - 1 = \sqrt{2}.$$

Hierauf kommt man auch noch auf eine andere Art. Es ist nämlich: $r-1 = [0; 2, 2, 2, \ldots]$ und $r+1 = [2; 2, 2, 2, \ldots]$. Da $(r-1)\cdot(r+1) = 1$ folgt $r = \sqrt{2}$. Warum so kompliziert?

Nun, betrachten wir folgenden Bruch: $r = [1; 1, 2, 1, 2, \ldots]$.
$r - 1 = [0; 1, 2, 1, 2, \ldots]$ und $r + 1 = [2; 1, 2, 1, 2, \ldots]$. Setzen wir $t = [1; 2, 1, 2, \ldots]$, so erhalten wir $r + 1 = [2; t] = 2 \cdot t$ und $r - 1 = [0; t]$. Daraus folgt $(r-1)\cdot(r+1) = 2$ oder $r = \sqrt{3}$.

Es ist kein Zufall, dass all diese Kettenbrüche *periodisch* sind: Alle irrationalen Quadratwurzeln besitzen eine periodische Darstellung als einfacher unendlicher Kettenbruch!

1.4 Die Khinchin-Konstante

Eine der bemerkenswertesten Erkenntnisse der Zahlentheorie oder vielleicht sogar der ganzen Mathematik ist die Existenz der sog. *Khinchin-Konstante*[1]. Der Ausdruck

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n}$$

konvergiert für *fast alle reelle Zahlen* (oder technisch: bis auf eine Menge vom Lebesgue-Maß 0) gegen denselben Wert, eben die Khinchin-Konstante. Sie ist anschaulich der Grenzwert des *geometrischen Mittels* der a_k, die bei der Entwicklung einer reellen Zahl in einen einfachen unendlichen Kettenbruch auftreten. Nimmt man eine beliebige reelle Zahl, so ist die Wahrscheinlichkeit praktisch 1, dass ihre Kettenbruchentwicklung diesen Grenzwert besitzt.

In Abbildung 1.2 ist für einige Werte das n-te geometrische Mittel über n aufgetragen. Wie man sieht, konvergieren die Werte für wachsende n gegen die Khinchin-Konstante.

Dabei ist rot die Entwicklung von π, grün die von $\sin 1$ und blau die der Euler-Mascheroni-Konstante γ eingetragen. Der wahre Zahlenwert der Konstante ist die eingezeichnete Gerade bei 2,685452001 . . .

Einige Gegenbeispiele von reellen Zahlen, deren Entwicklung nicht gegen die Khinchin-Konstante konvergiert, kennen wir schon. Der Goldene Schnitt mit der Entwicklung $[1; 1, \ldots]$ konvergiert z. B. gegen 1, die Kettenbruchentwicklungen von $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ konvergieren ebenfalls gegen einen anderen Wert.

[1] Es sind auch die Transkriptionen Khintchine, Chintschin und Chincin gebräuchlich.

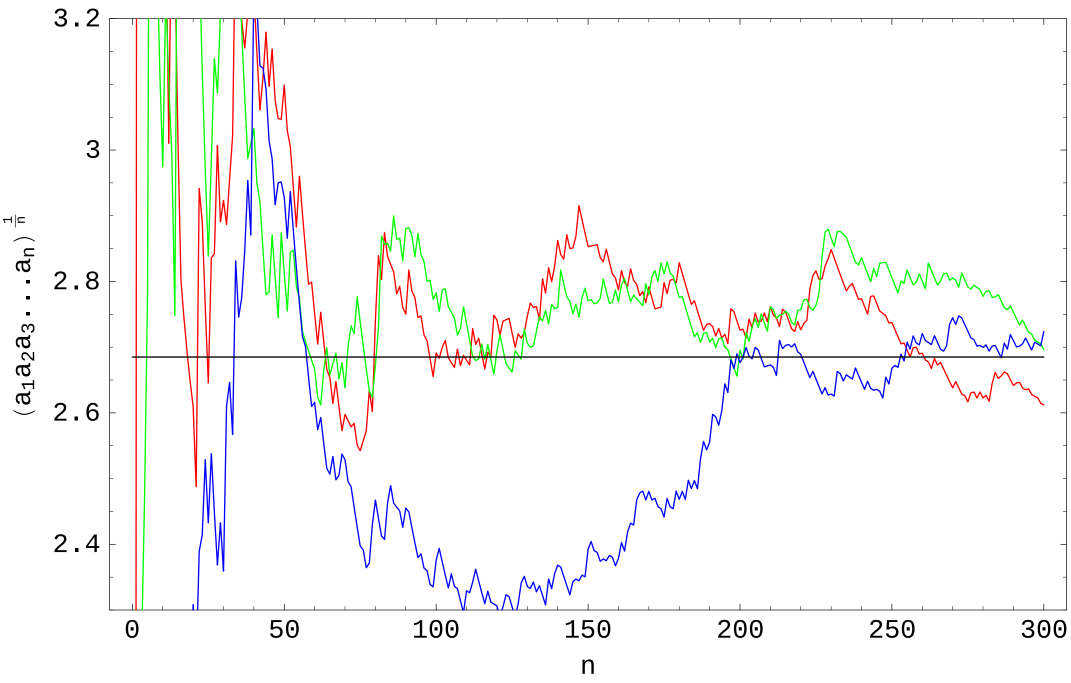

Abbildung 1.2: Beispiele für die Konvergenz gegen die Khinchin-Konstante.

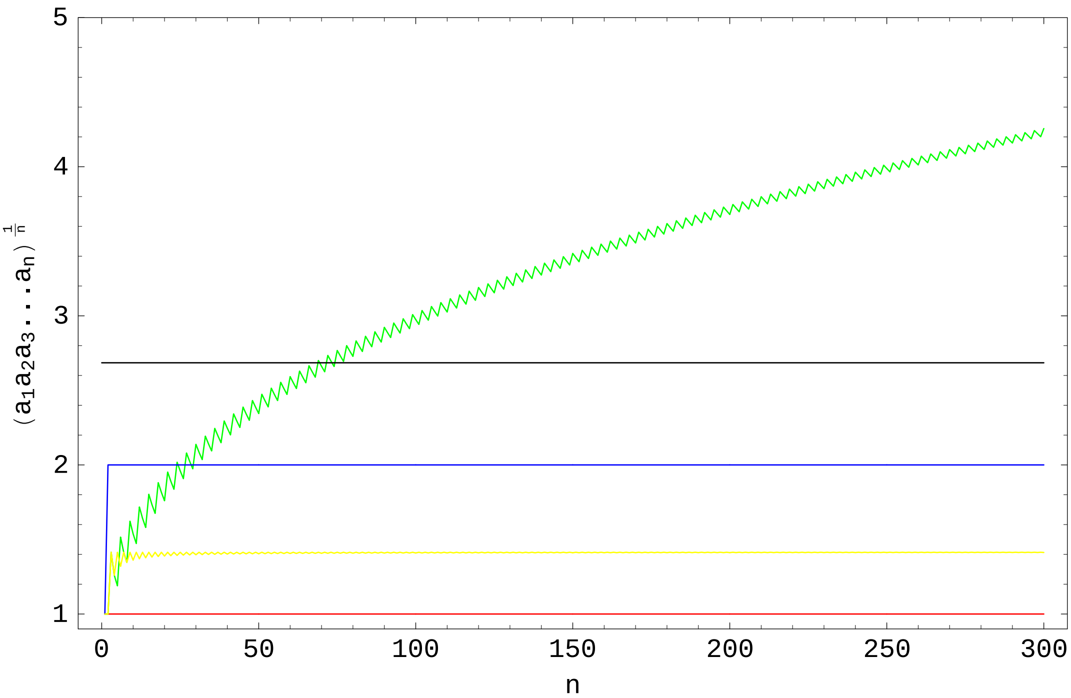

Abbildung 1.3: Gegenbeispiele für die Konvergenz gegen die Khinchin-Konstante.

In Abbildung 1.3 sind die geometrischen Mittel für φ rot, die Eulersche Zahl

$$\mathrm{e} = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots]$$

grün, $\sqrt{2}$ blau und $\sqrt{3}$ gelb eingezeichnet.

2 Unendliche Wurzelausdrücke

Jetzt werden wir uns mit Ausdrücken der Form

$$\sqrt{a_1 + b_1\sqrt{a_2 + b_2\sqrt{a_3 + b_3\sqrt{\dots}}}}$$

beschäftigen. Betrachten wir zuerst den Sonderfall

$$\begin{aligned} && r &= \sqrt{a + b\sqrt{a + b\sqrt{a + b\sqrt{\dots}}}} \\ \Rightarrow && r &= \sqrt{a + br} \\ \Rightarrow && r^2 - br - a &= 0 \\ \Rightarrow && r &= \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4a}}{2}. \end{aligned}$$

Erstaunlich ist, dass wir hier für $a = b = 1$ erneut den *Goldenen Schnitt* als Ergebnis erhalten![1] Ist $a = 0$, so erhalten wir das überraschende Ergebnis

$$\sqrt{b\sqrt{b\sqrt{b\sqrt{b\sqrt{\dots}}}}} = b.$$

Basierend auf obiger Gleichung lassen sich jetzt eine Reihe Umformungen durchführen, indem wir b jeweils unter die Wurzel holen:

$$\begin{aligned} \frac{b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2} &= \sqrt{a + b\sqrt{a + b\sqrt{a + b\sqrt{\dots}}}} \\ &= \sqrt{a + \sqrt{ab^2 + b^3\sqrt{a + b\sqrt{\dots}}}} \\ &= \sqrt{a + \sqrt{ab^2 + \sqrt{ab^6 + b^7\sqrt{\dots}}}} \\ &= \sqrt{a + \sqrt{ab^2 + \sqrt{ab^6 + \sqrt{ab^{14} + \dots}}}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{a}{b^2}\right) b^2 + \sqrt{\left(\frac{a}{b^2}\right) b^4 + \sqrt{\left(\frac{a}{b^2}\right) b^8 + \sqrt{\left(\frac{a}{b^2}\right) b^{16} + \dots}}}} \end{aligned}$$

[1] Hierauf kommen wir im Artikel über Fibonacci-Zahlen nochmals zurück.

Das sieht schon mal nicht schlecht aus. Jetzt setzen wir $c = a/b^2$:

$$\sqrt{cb^2 + \sqrt{cb^4 + \sqrt{cb^8 + \sqrt{cb^{16} + \dots}}}} = \frac{b}{2}(1 + \sqrt{1+4c})$$

Damit erhalten wir z. B. schöne Ausdrücke für 1 ($c = 2, b = 1/2$) und $\sqrt{2}$ ($c = 2, b = 1/\sqrt{2}$):

$$\sqrt{\frac{2}{2^2} + \sqrt{\frac{2}{2^4} + \sqrt{\frac{2}{2^8} + \sqrt{\frac{2}{2^{16}} + \dots}}}} = 1$$

$$\sqrt{\frac{2}{2^1} + \sqrt{\frac{2}{2^2} + \sqrt{\frac{2}{2^4} + \sqrt{\frac{2}{2^8} + \dots}}}} = \sqrt{2}$$

Eine weitere Möglichkeit zur Erschaffung unendlicher Wurzelausdrücke ist das rekursive Anwenden der 1. binomischen Formel:

$$\begin{aligned}
[a+b] &= \sqrt{a^2 + 2ab + b^2} \\
&= \sqrt{b^2 + a[a+b+b]} \\
&= \sqrt{b^2 + a\sqrt{b^2 + (a+b)[a+2b+b]}} \\
&= \sqrt{b^2 + a\sqrt{b^2 + (a+b)\sqrt{b^2 + (a+2b)[a+3b+b]}}} \\
&= \sqrt{b^2 + a\sqrt{b^2 + (a+b)\sqrt{b^2 + (a+2b)\sqrt{a^2 + (a+3b)\sqrt{\dots}}}}}
\end{aligned}$$

Setzt man nun z. B. $a = 2$ und $b = 1$, so erhält man:

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{\dots}}}} = 3$$

3 Unendliche Potenzen

3.1 Allgemeiner und Spezialfall

Nun betrachten wir Ausdrücke der Form:

$$a_0 + b_0(a_1 + b_1(a_2 + b_2(\cdots)^{p_2})^{p_1})^{p_0}$$

Aus dieser allgemeinen Form lässt sich jetzt allerlei ableiten. Sind z. B. alle $b_k = 1$ und alle $p_k = 1$, so erhalten wir:

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Oder für $a_k = 0$ und $p_k = 1$:

$$b_0\, b_1\, b_2\, b_3\ \cdots$$

Die oben untersuchten Ausdrücke werden jetzt zu *Spezialfällen* dieses allgemeinen unendlichen Potenzausdrucks, denn unendliche Kettenbrüche erhalten wir aus $p_k = -1$ und unendliche Wurzelausdrücke aus $p_k = 1/n$. Außerdem entstehen noch einige *Hybridformen*, z. B. mit $b_k = 1/c_k$ und $p_k = 1$ ein aufsteigender Kettenbruch

$$a_0 + \cfrac{a_1 + \cfrac{a_2 + \cfrac{a_3 + \ldots}{c_2}}{c_1}}{c_0}$$

oder mit $p_k = -1/n$

$$a_0 + \cfrac{b_0}{\sqrt[n]{a_1 + \cfrac{b_1}{\sqrt[n]{a_2 + \cfrac{b_2}{\sqrt[n]{\ldots}}}}}}.$$

3.2 Klassiker

In der Literatur finden sich unzählige Ausdrücke, die unendliche Potenzausdrücke enthalten. Hier ist eine kleine Auswahl von Gleichungen, die Euler (1–2) und Ramanujan

(3–5) aufgestellt haben.

$$\mathrm{e}-1=1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cfrac{5}{5+\cfrac{6}{6+\dots}}}}}$$

$$\frac{1}{\mathrm{e}-2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\cfrac{4}{5+\cfrac{5}{6+\dots}}}}}$$

$$1-5\left(\frac{1}{2}\right)^3+9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3-13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3+\ldots=\frac{2}{\pi}$$

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{\mathrm{e}^{-2\pi}}{1+\cfrac{\mathrm{e}^{-4\pi}}{1+\cfrac{\mathrm{e}^{-6\pi}}{1+\dots}}}}=\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}}$$

$$\left(1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\ldots\right)+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\dots}}}}=\sqrt{\frac{\pi\mathrm{e}}{2}}$$

3.3 Die „Power-Tower“-Funktion

Die *Pfeil-Notation* ist folgendermaßen rekursiv definiert:

$$a\uparrow b=\underbrace{a\,a\,a\,a\,\ldots\,a}_{b}=a^b,$$

$$a\uparrow\uparrow b=\underbrace{a\uparrow a\uparrow a\uparrow a\uparrow\ldots\,a}_{b}=\underbrace{a^{a^{a^{\cdots a}}}}_{b}$$

usw. Damit lässt sich folgende Funktion definieren:

$$f(x)=x\uparrow\uparrow\infty.$$

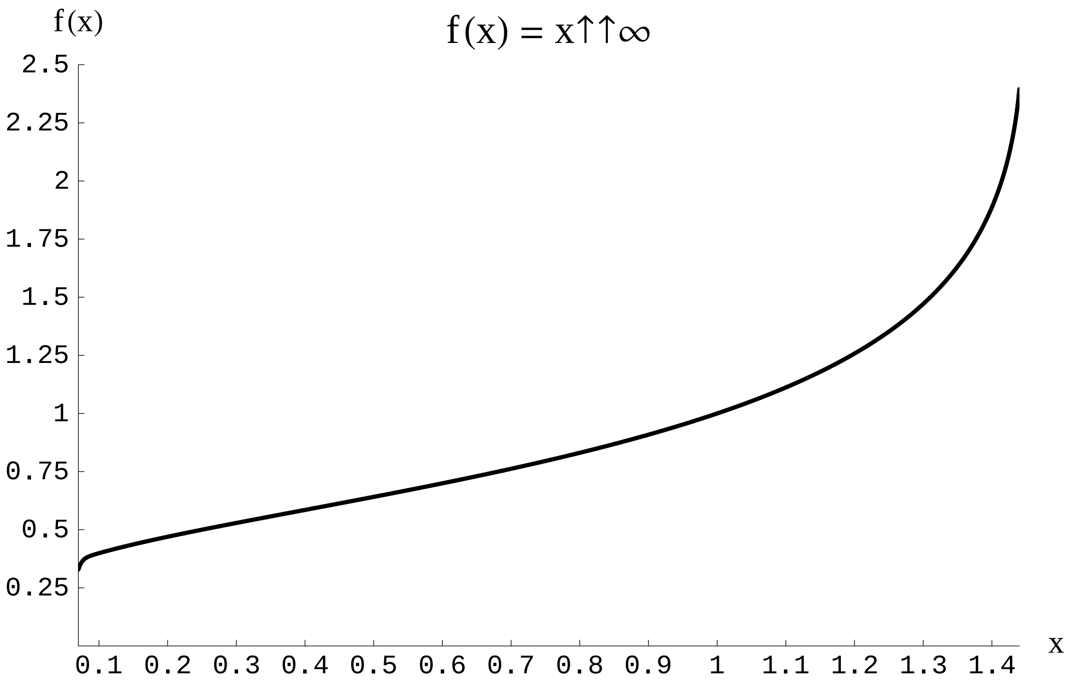

Abbildung 3.1: Die „Power-Tower"-Funktion.

Diese Funktion heißt *„Power-Tower"-Funktion*. Dabei ist zu beachten, dass der Ausdruck nur für bestimmte x konvergent ist, für die gilt

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{e}} \leq x \leq \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}.$$

Ein Plot der Funktion im definierten Intervall ist in Abbildung 3.1 dargestellt.

Wir betrachten die Power-Tower-Funktion nun etwas genauer. Um die Konvergenz des Ausdrucks $f(x)$ zu untersuchen, führen wir zunächst rekursiv die Notation

$$\begin{aligned} a^{\{1\}} &= a, \\ a^{\{2\}} &= a^{a}, \\ a^{\{n\}} &= a^{\left(a^{\{n-1\}}\right)} \end{aligned}$$

ein. Dann gilt natürlich

$$a \uparrow\uparrow b = a^{\{b\}}$$

und

$$f(x) = x \uparrow\uparrow \infty = \lim_{n \to \infty} a^{\{n\}},$$

so dass wir für unsere Rechnungen die etwas unhandliche Pfeil-Notation vermeiden können.

Ist $f(x) = y$, so folgt

$$x^y = x^{\lim_{n\to\infty} x^{\{n\}}} = \lim_{n\to\infty} x^{x^{\{n\}}} = \lim_{n\to\infty} x^{\{n+1\}} = f(x) = y,$$

also

$$x = y^{1/y}.$$

Diese Rechnung zeigt, dass die Power-Tower-Funktion f auf ihrem Definitionsbereich gerade die Umkehrfunktion der Funktion g mit $g(y) = y^{1/y}$ ist, denn $f(g(y)) = y$. Wir können daher durch das Studium der Funktion g viel über die Funktion f lernen. Zunächst ist

$$g(y) = \mathrm{e}^{(\ln y)/y}$$

und daher nach der Kettenregel und Quotientenregel

$$g'(y) = \frac{1/y \cdot y - \ln y \cdot 1}{y^2} \mathrm{e}^{(\ln y)/y} = \frac{1 - \ln y}{y^2} y^{1/y}.$$

Nun ist $\ln y < 1$ für $y < \mathrm{e}$ und $\ln y > 1$ für $y > \mathrm{e}$. Folglich ist $g'(y) > 0$ für $y < \mathrm{e}$ und $g'(y) < 0$ für $y > \mathrm{e}$. Damit ist die Funktion g streng monoton wachsend für $y < \mathrm{e}$ und streng monoton fallend für $y > \mathrm{e}$. Die Funktion g hat somit ein Maximum bei $y = \mathrm{e}$ mit $g(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$. Wegen $g(0) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} g(x) = 1$ wächst die Funktion g auf dem Intervall $[0, \mathrm{e}]$ zunächst auf $\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$ und fällt dann auf $[\mathrm{e}, \infty[$ ab auf 1. Auf jedem der beiden Intervalle ist g streng monoton und somit umkehrbar. Die Umkehrfunktion von g ist aber natürlich nur dort gleich f, wo f definiert ist. Der Definitionsbereich von f muss im Intervall $[0, \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}]$ liegen, denn das ist der Wertebereich von g.

Übrigens lassen sich mit der Funktion g sog. *Goldbach-Paare* untersuchen. Das sind Paare von Zahlen (a, b), für die

$$a^b = b^a$$

gilt. Denn nach obiger Betrachtung nimmt g auf den Intervallen $]1, \mathrm{e}[$ und $]\mathrm{e}, \infty[$ dieselben Werte an und ist dort streng monoton, so dass es für jedes $a \in]1, \mathrm{e}[$ genau ein $b \in]\mathrm{e}, \infty[$ gibt mit $g(a) = g(b)$. Das bedeutet aber $a^{1/a} = b^{1/b}$ oder eben $a^b = b^a$, d. h. es handelt sich um ein Goldbach-Paar.

Offenbar gibt es also unendlich viele Goldbach-Paare, aber gibt es auch unendlich viele rationale Goldbach-Paare mit $a, b \in \mathbb{Q}$? Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir das Goldbach-Paar (a, b) und nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $a < b$. Dann gilt $b = sa$ mit einer reellen Zahl $s > 1$. Es ist dann

$$a^{sa} = (sa)^a$$

und nach Ziehen der a-ten Wurzel

$$a^s = sa$$

und weiter

$$s = a^{s-1}$$

und

$$a = s^{1/(s-1)}$$

sowie

$$b = sa = s^{s/(s-1)}.$$

Für die Wahl

$$s = 1 + \frac{1}{n}$$

mit einer natürlichen Zahl n wird dann

$$a = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

und

$$b = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1},$$

so dass offensichtlich $a, b \in \mathbb{Q}$ gilt. Es gibt unendlich viele rationale Goldbach-Paare.

Aber wie viele natürliche Goldbach-Paare mit $a, b \in \mathbb{N}$ gibt es? Da hilft nun unsere Analyse der Funktion g weiter. Da es im Intervall $]1, \mathrm{e}[$ nur die natürliche Zahl 2 gibt, gibt es nur ein einziges natürliches Goldbach-Paar, nämlich $(2, 4)$ mit $2^4 = 4^2$.

Kommen wir nach diesem kleinen Exkurs zurück zur Frage nach dem Definitionsbereich von f, der Power-Tower-Funktion. Dieser Definitionsbereich muss eine Teilmenge des Wertebereichs von g, dem Intervall $[0, \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}]$, sein. Wegen

$$f(1) = \lim_{n\to\infty} 1^{\{n\}} = 1$$

ist 1 im Definitionsbereich enthalten. Betrachten wir nun zunächst den Fall $x > 1$. Dann ist $1 < x < x^x$ und allgemein

$$x^{\{n\}} < x^{\{n+1\}}.$$

Wegen $x \leq \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$ ist für ein y mit $1 < y < \mathrm{e}$ die Ungleichung

$$x^y \leq \left(\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}\right)^y < \left(\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}\right)^{\mathrm{e}} = \mathrm{e}$$

erfüllt. Nun ist $\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}} < \mathrm{e}$, und man kann daher in diese Ungleichung insbesondere $y = x$ einsetzen. Man erhält

$$x^x < \mathrm{e}.$$

Ebenso ist

$$x^{x^x} < x^{\mathrm{e}} \leq \left(\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}\right)^e = e.$$

Durch vollständige Induktion zeigt man nun $x^{\{n\}} < \mathrm{e}$ für alle n. Die Folge der $x^{\{n\}}$ ist also wachsend und nach oben beschränkt, und folglich konvergiert sie gegen ein y mit $y = f(x)$. Die Funktion f ist somit definiert für alle $x \in [1, \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}]$.

Betrachten wir nun den Fall $0 < x < 1$. Dieser Fall ist erheblich komplizierter, da für $0 < p < q$ nun gilt, dass $x^q < x^p$. Dies hat zur Folge, dass sich die Beträge der Iterierten $x^{\{n\}}$ auf komplizierte Weise verschachteln. So gilt etwa

$$0 < x < 1,$$

$$0 < x < x^x < 1,$$
$$0 < x < x^{\{3\}} < x^x < 1,$$
$$0 < x < x^{\{3\}} < x^{\{4\}} < x^x < 1.$$

Durch vollständige Induktion kann man zeigen, dass allgemein

$$0 < x^{\{2n-1\}} < x^{\{2n+1\}} < \ldots < x^{\{2n+2\}} < x^{\{2n\}} < 1$$

gilt. Das bedeutet, dass die Teilfolge $(x^{\{2n-1\}})$ nach oben beschränkt ist und wächst, während die Teilfolge $(x^{\{2n\}})$ nach unten beschränkt ist und fällt. Beide Folgen konvergieren also, aber damit auch die Folge der Iterierten $(x^{\{n\}})$ konvergiert, müssen beide Teilfolgen gegen denselben Grenzwert konvergieren. Die Analyse der dafür notwendigen Bedingungen ist recht aufwändig, so dass wir hier davon absehen werden. Es stellt sich dabei jedenfalls heraus, dass die untere Grenze des Definitionsbereichs von f durch $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}$ gegeben ist, so dass der gesamte Definitionsbereich von f das Intervall $[\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}, \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}]$ ist.

4 Aufgaben

1. Warum ist die Zuordnung rationale Zahl $\mapsto$ einfacher endlicher Kettenbruch von Natur aus keine Funktion?

2. Aus welchem Grund bildet man das geometrische Mittel zur Bestimmung der Khintchine-Konstante angefangen mit a_1 und nicht a_0?

3. Weshalb kann man behaupten, dass fast jede reelle Zahl eine gegen die Khinchin-Konstante konvergierende Kettenbruchentwicklung besitzt, obwohl das für keine rationale Zahl der Fall ist (Warum?)?

4. Wieso konvergiert keine Kettenbruchentwicklung einer irrationalen Quadratwurzel gegen die Khinchin-Konstante? Untersuche, wie sich bei ihnen das geometrische Mittel der a_k verhält!
(Verwende $\sqrt{14} = [3; 1, 2, 1, 6, \ldots]$!)

5. Die Zahl e hat die oben angegebene Kettenbruchentwicklung. Überlege, ob das geometrische Mittel der a_k konvergiert, und falls ja, gegen welchen Wert!

6. Gib drei verschiedene unendliche Wurzelausdrücke für die Zahl 4 an und untersuche sie im Hinblick auf die Konvergenzgeschwindigkeit (siehe Tabelle „Pi“)!

7. Zeige, dass für $a, b, n > 0$ gilt
$$a = \sqrt[n]{(1-b)a^n + ba^{n-1}\sqrt[n]{(1-b)a^n + ba^{n-1}\sqrt[n]{(1-b)a^n + ba^{n-1}\sqrt[n]{\ldots}}}}.$$

8. Zeige, dass für $x < 1$ gilt
$$\prod_{i=0}^{\infty}(1 + x^{2^i}) = \frac{1}{1-x}.$$
Benutze dazu die Identität
$$\left[\frac{1}{1-x}\right] = (1+x)\left[\frac{1}{1-x^2}\right].$$

Index