Die Kettenlinie

Thomas Peters
Thomas' Mathe-Seiten
www.mathe-seiten.de

17. Oktober 2004

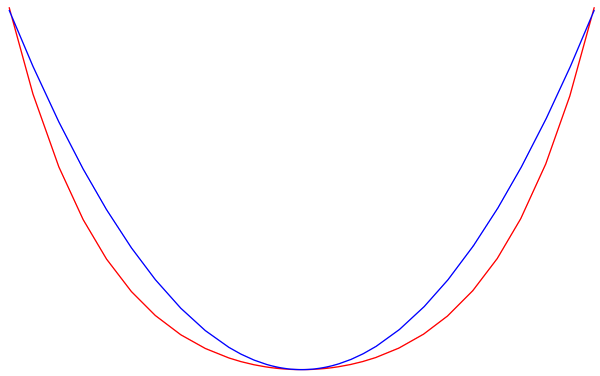

Abbildung 1.1: Im Bild ist rot die Kettenlinie und blau die Parabel dargestellt.

In diesem Artikel machen wir einen kleinen Abstecher in die Physik, genauer gesagt in die Mechanik, und fragen uns: Welche Form nimmt eine Kette oder eine Schnur an, wenn man sie an ihren Enden aufhängt? Nach oberflächlichem Betrachten würde man sagen, eine Parabel, doch das ist nicht richtig. Wie die Kurve tatsächlich aussieht, und wie man trotzdem an eine Parabel kommt, untersuchen wir hier.

Die Kette an sich

Dass es sich nicht um eine Parabel handeln kann, sieht man leicht ein, indem man eine Parabel zeichnet und versucht, eine Schnur so aufzuhängen, dass sie sich decken — es wird nicht funktionieren (siehe Abbildung 1.1)!

Der Name *Kettenlinie* leitet sich von der Betrachtung einer Kette ab. Tatsächlich ist die Kette mathematisch schwer zu handhaben, da ihre Dichte aufgrund der Kettenglieder ständig variiert. Deshalb werden wir eine Schnur bzw. ein Seil betrachten, bei dem die Dichte als konstant angenommen werden kann. Man erhält mathematisch ein Seil aus einer Kette, wenn die Größe der Kettenglieder vernachlässigbar klein ist.

Gehen wir also von einem Seil mit konstanter Dichte, d. h. homogen verteilter Masse auf seiner gesamten Länge, aus und befestigen es an seinen Enden. Nachdem es seine endgültige Lage eingenommen hat, befindet es sich in Ruhe. Das bedeutet, dass die Summe der *Kräfte*, die in jedem Punkt des Seils angreifen, Null ist. Betrachten wir diese Kräfte auf einen Punkt rechts vom Minimum:

Die offensichtlichste Kraft ist die *Schwerkraft* $\vec{G}$, die die Erde auf das Seil ausübt. Ihre Richtung ist in jedem Punkt des Seils gleich, nämlich senkrecht nach unten. Eine weitere Kraft $\vec{S}$ wird durch die *Spannung* des Seils hervorgerufen und zeigt horizontal nach links. Außerdem wirkt eine Kraft $\vec{H}$ in Richtung der Tangente der Kurve an diesen Punkt nach rechts oben. Die vektorielle Summe dieser Kräfte muss Null ergeben (siehe Abbildung 1.2).

Um dies genauer untersuchen zu können, führen wir ein Koordinatensystem ein. Der Ursprung O dieses Koordinatensystems sei das Minimum der Kettenlinie. Nennen wir die Funktionsgleichung der Kurve $f(x)$ — x sei die Abszisse, $y = f(x)$ die Ordinate —, so können

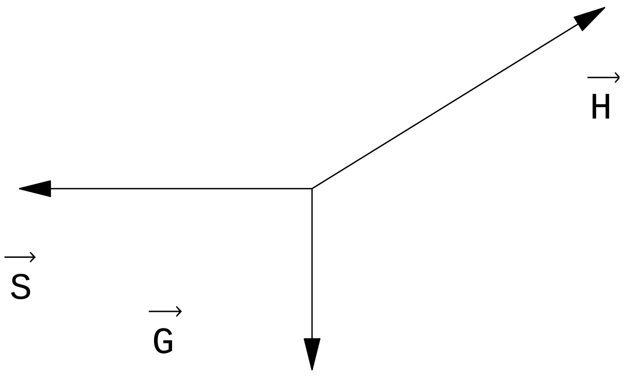

Abbildung 1.2: In jedem Punkt des Seils ist die Summe der angreifenden Kräfte gleich Null.

wir nun $f'(x)$ ausrechnen:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{G}{S}$$

Dabei ist S eine Konstante, wogegen G von der Position des betrachteten Punktes, also von x, abhängt. Die Kraft G ist proportional zur Länge des Seils von O bis zum betrachteten Punkt.

Ferner sei die Masse pro Längeneinheit des Seils λ. Damit ergibt sich die Gesamtmasse unseres idealisierten Seils als $\lambda \cdot s$, wobei s die Bogenlänge der Kettenlinie von O aus gemessen ist. Wir erhalten

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\lambda s g}{S},$$

wobei g die Fallbeschleunigung ist. Umformen ergibt

$$s = \frac{S}{\lambda g} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Außerdem erhält man s aus der bekannten Formel für die Bogenlänge:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^x \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}t \\ \Rightarrow \quad \frac{S}{\lambda g}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \int_0^x \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}t \\ \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\lambda g}{S}\int_0^x \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Differenziert man diese Gleichung nach x, so erhält man eine Differentialgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\lambda g}{S}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 1}$$

Diese Differentialgleichung lässt sich leicht durch Trennung der Variablen lösen. Dazu substituieren wir zunächst $z = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ und dividieren durch die Wurzel

$$\frac{z'}{\sqrt{z^2+1}} = \frac{\lambda g}{S}.$$

Nun integrieren wir beide Seiten über x und erhalten

$$\begin{aligned} && \operatorname{arsinh} z &= \frac{\lambda g}{S} x \\ \Rightarrow && z &= \sinh \frac{\lambda g}{S} x \\ \Rightarrow && y &= \frac{S}{\lambda g} \cosh\left(\frac{\lambda g}{S} x\right) - \frac{S}{\lambda g}. \end{aligned}$$

Das Absolutglied ist nötig, damit $f(0) = 0$ ist. Die Lösung lässt sich durch Einsetzen leicht überprüfen. Es ist also in der Tat keine Parabel!

Die Kette mit Gewicht

Anders sieht es aus, wenn der Grund für das Durchhängen des Seils nicht nur sein eigenes Gewicht ist, sondern das Seil etwas trägt, wie es z. B. bei Hängebrücken der Fall ist.

Angenommen, das angehängte Gewicht ist (z. B. durch in gleichem Abstand angebrachte vertikale Seile) gleichmäßig auf das gesamte tragende Seil verteilt. Dann ist das Eigengewicht des Seils vernachlässigbar. Vielmehr ist für die Gewichtskraft, die in einem Punkt ausgeübt wird, die Länge der Brücke vom Minimum des Seils bis zum betrachteten Punkt wichtig. Wir haben wieder

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{G}{S}$$

oder

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\lambda x g}{S},$$

wobei λ diesmal die Masse pro Längeneinheit des Gewichts sein soll. Integration liefert

$$y = \frac{\lambda g}{2S} x^2$$

da wieder $f(0) = 0$ sein muss. Wir erhalten tatsächlich eine Parabel!

Der Energieansatz

Ein sehr eleganter, wenn auch etwas fortgeschrittener Ansatz ist der folgende: Wann immer ein Körper sich selbst überlassen wird, neigt er dazu, seine potentielle Energie zu minimieren. Hat man die Kette einmal aufgehängt, so hat sie, nachdem sie zur Ruhe gekommen ist, gerade die Form, die ihrer geringsten potentiellen Energie entspricht.

Betrachtet man ein Massenelement $\mathrm{d}m$, so hat es die potentielle Energie $\mathrm{d}E_{\mathrm{pot}} = gy\,\mathrm{d}m$. Die gesamte potentielle Energie der Kette ist dann

$$E_{\mathrm{pot}} = g\int\limits_{x_1}^{x_2} y\,\mathrm{d}m,$$

wenn die Kette an den Stellen x_1 und x_2 befestigt ist. Wir wandeln nun dieses Integral in ein Integral über x um. Dazu rechnen wir

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}s} = \frac{\rho\,\mathrm{d}V}{\mathrm{d}s} = \rho\frac{A\,\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s} = \rho A,$$

wobei A die Querschnittsfläche der Kette und ρ die Massendichte ist. Damit erhält man

$$E_{\mathrm{pot}} = g\int\limits_{x_1}^{x_2} \rho A y\,\mathrm{d}s = g\rho A\int\limits_{x_1}^{x_2} y\,\mathrm{d}s = g\rho A\int\limits_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x,$$

denn es ist

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x.$$

In der *Variationsrechnung* lernt man, dass das Integral

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')\,\mathrm{d}x$$

dann extremal[1] wird, wenn die *Euler-Lagrange-Gleichung*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'} - \frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y} = 0$$

erfüllt ist. Angewandt auf $f(x,y,y') = y\sqrt{1+y'^2}$ ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} - \sqrt{1+y'^2} = 0$$

[1] Genau genommen folgt die Euler-Lagrange-Gleichung schon, wenn das Integral stationär wird. In unserem Fall handelt es sich jedoch tatsächlich um ein Minimum.

$$\Rightarrow \qquad \frac{(y'^2+yy'')\sqrt{1+y'^2}-yy'\dfrac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}}}{1+y'^2}-\sqrt{1+y'^2}=0.$$

Durch Multiplikation mit $\sqrt{1+y'^2}(1+y'^2)$ folgt

$$(y'^2+yy'')(1+y'^2)-yy'^2y''-(1+y'^2)^2=0.$$

Ausmultiplizieren liefert

$$y'^2+y'^4+yy''+yy''y'^2-yy'^2y''-1-2y'^2-y'^4=0$$

und anschließendes Zusammenfassen

$$y'^2-yy''+1=0. \tag{$*$}$$

Diese Differentialgleichung ist nun nicht mehr so einfach zu lösen wir vorhin, aber man rechnet sofort nach, dass die Kettenlinie diese Gleichung erfüllt. Zu ihrer Lösung differenzieren wir zunächst nach x und erhalten

$$2y'y''-y'y''-yy'''=0,$$

was man auch schreiben kann als

$$-y^2\left(\frac{y''}{y}\right)'=0.$$

Da wir den trivialen Fall $y\equiv 0$ ausschließen können folgt damit $(y''/y)'=0$ bzw.

$$y''=cy$$

mit irgendeiner Konstanten c. Diese Differentialgleichung ist sehr bekannt; ein Fundamentalsystem ist

$$\{\mathrm{e}^{\sqrt{c}x},\mathrm{e}^{-\sqrt{c}x}\},$$

d. h. jede Lösung lässt sich als Linearkombination dieser beiden Funktionen schreiben. Aus Bequemlichkeitsgründen wählen wir jedoch ein anderes Fundamentalsystem. Nennen wir die erste Funktion y_1 und die zweite y_2, so betrachten wir das System

$$\left\{\frac{y_1+y_2}{2},\frac{y_1-y_2}{2}\right\}=\{\cosh\sqrt{c}x,\sinh\sqrt{c}x\}.$$

Durch Einsetzen von $y''=cy$ in $(*)$ folgt

$$y'^2-cy^2+1=0.$$

Bevor wir nun in diese Gleichung mit dem Ansatz $y(x)=a_1\cosh\sqrt{c}x+a_2\sinh\sqrt{c}x$ gehen, überlegen wir uns, dass aus Symmetriegründen $y(-x)=y(x)$ gelten muss, woraus sofort $a_2=0$ folgt. Nun rechnen wir

$$a_1^2c\sinh^2\sqrt{c}x-ca_1^2\cosh^2\sqrt{c}x+1=0$$

und weiter

$$a_1^2 c(\sinh^2 \sqrt{c}x - \cosh^2 \sqrt{c}x) = -1,$$

was wegen $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ auf $c = 1/a_1^2$ führt. Die endgültige Lösung ist damit

$$y(x) = a_1 \cosh\left(\frac{1}{a_1}x\right),$$

deren Integrationskonstante noch durch eine Anfangsbedigung festgelegt werden muss.

Die Kettenlinie als Rotationskörper

Die Kettenlinie kann man auch mathematisch schön charakterisieren: Sie ist diejenige Kurve, welche durch zwei beliebig vorgegebene Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) geht und bei Rotation um die y-Achse eine Rotationsfläche minimaler Oberfläche produziert[2]. Dies können wir wieder leicht mit den Mitteln der Variationsrechnung nachprüfen.

Die Kurve können wir uns aus infinitesimal kleinen Kurvenstückchen $\mathrm{d}s$ zusammengesetzt denken. Ein solches Kurvenstück erzeugt bei Rotation um die y-Achse eine Mantelfläche

$$\mathrm{d}M = 2\pi x\,\mathrm{d}s = 2\pi x\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = 2\pi x\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Die Gesamtmantelfläche erhält man dann durch Integration über x zu

$$M = 2\pi\int_{x_1}^{x_2} x\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Dies ist das Integral, welches minimal werden soll. Bezeichnen wir den Integranden mit

$$f(x, y, y') = x\sqrt{1 + y'^2},$$

so werden wir auf die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'} - \frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{xy'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) = 0$$

geführt. Diese kann nun direkt integriert werden. Man erhält dann

$$\frac{xy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1$$

und nach Quadrieren und Umordnen

$$y'^2 = \frac{C_1^2}{x^2 - C_1^2}.$$

[2]Wir gehen von $0 < x_1 < x_2$ und $0 < y_1 < y_2$ aus.

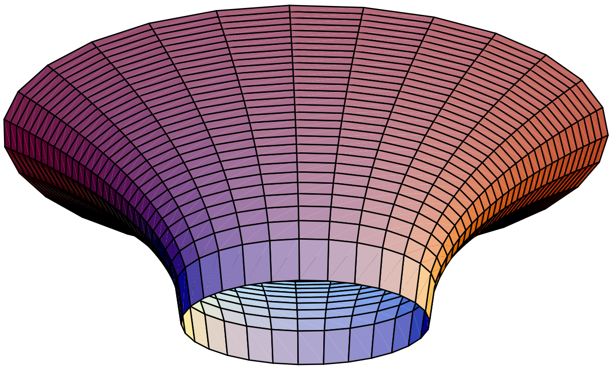

Abbildung 1.3: Der von der Kettenlinie erzeugte Rotationskörper.

Da dieser Ausdruck nicht negativ werden darf, muss die Integrationskonstante C_1 kleiner sein als x_1. Nach unserer Wahl von y_1 und y_2 müssen wir nun beim Wurzelziehen das positive Vorzeichen wählen, damit die Steigung der Kurve positiv ist. Somit folgt

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{C_1}{\sqrt{x^2 - C_1^2}}.$$

Diese Differentialgleichung können wir direkt integrieren zu

$$y(x) = C_1 \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{x^2 - C_1^2}}\,\mathrm{d}x = C_1 \mathrm{arcosh}\frac{x}{C_1} + C_2.$$

Die Integrationskonstanten sind aus der Forderung $y(x_1) = y_1$ und $y(x_2) = y_2$ zu bestimmen. Auflösen nach x ergibt schließlich

$$x(y) = C_1 \cosh \frac{y - C_2}{C_1}.$$

Diese Rotationsfläche heißt *Katenoid*.