Hyperbolische Geometrie

Thomas Peters
Thomas' Mathe-Seiten
www.mathe-seiten.de

18. August 2014

Ein Wort über metrische Räume

Ein *metrischer Raum* X ist ein Raum, in dem eine *Distanzfunktion* (die *Metrik*), die für alle Punkte $P_1, P_2 \in X$ den Abstand zweier Punkte als nichtnegative reelle Zahl $d(P_1, P_2)$ liefert, definiert ist mit den folgenden Eigenschaften:

1. $d(P_1, P_2) = 0 \iff P_1 = P_2$
2. $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$
3. $d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) \geq d(P_1, P_3)$

Metrische Räume spielen in der Mathematik eine übergeordnete Rolle. Denn ohne die Möglichkeit des Ausmessens von Entfernungen ist keine Geometrie denkbar. So haben wir bei der Definition der Hausdorff-Dimension stillschweigend vorausgesetzt, dass das Fraktal in einen metrischen Raum eingebettet ist; sonst wäre die Bestimmung der Durchmesser nicht möglich gewesen. Bei der Diskussion der IFS haben wir sogar explizit die Eigenschaften der Distanzfunktion benutzt.

Die geläufigste Metrik ist natürlich die in der euklidischen Geometrie verwendete Formel

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

was nichts anderes ist als der Satz des Pythagoras. Aber dies ist bei weitem nicht die einzige sinnvolle Distanzfunktion. Eine andere Möglichkeit ist z.B

$$d(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

Diese Formel heißt auch *Manhattan-Metrik*, weil es eben nicht möglich ist, in New York den in Luftlinie kürzesten Weg zu gehen (den man mit dem Satz des Pythagoras erhält), sondern man um die Häuserblöcke herumgehen muss. In einem schachbrettartigen Muster erhält man dann für den kürzesten Weg die oben angegebene Formel: Das ist für die Einwohner von Manhattan die Entfernung zweier Punkte.

Die Vielfalt der metrischen Räume ist so groß wie die Vielfalt der Distanzfunktionen. Durch geeignete Wahl der Metrik lässt sich jede erdenkliche Geometrie kreieren (sie muss sich nur an die oben aufgeführten Regeln halten). Wie wir im folgenden sehen werden, ist die Wahl der Metrik für die Modellbildung nicht-euklidischer Geometrien entscheidend.

Euklids Elemente und die Folgen

Was wir heute unter „Geometrie“ verstehen, ist größtenteils schon in der Antike entdeckt worden. Euklid hat das gesamte mathematische Wissen seiner Zeit in ein Lehrbuch verpackt, den „Elementen“. Dieses Buch ist über 2000 Jahre alt, ging durch unzählige Auflagen und war bis ins letzte Jahrhundert das meistverkaufte Buch nach der Bibel. Es war für unzählige Generationen der Inbegriff des mathematischen Denkens.

„Die Elemente“ besteht aus 13 Kapiteln mit verschiedenen Themen:

1) Dreiecke

2) Rechtecke

3) Kreise

4) Polygone

5) Proportionen

6) Ähnlichkeit

7-10) Zahlentheorie

11) Räumliche Geometrie

12) Pyramiden

13) Platonische Körper

Das gesamte Werk baut auf 23 Definitionen und 5 Postulaten (den *Axiomen* der euklidischen Geometrie) auf, aus denen alle 465 Sätze hergeleitet werden[1].

Die euklidischen Postulate sind:

1. Es ist möglich, eine Gerade von jedem beliebigen Punkt zu einem anderen Punkt zu zeichnen.

2. Es ist möglich, eine Gerade beliebig zu erweitern.

3. Es ist möglich, einen Kreis mit beliebigem Mittelpunkt und Radius zu zeichnen.

4. Alle rechten Winkel sind gleich.

5. Wenn eine Gerade zwei Geraden schneidet und die Innenwinkel auf der gleichen Seite weniger als zwei rechte Winkel sind, treffen sich die zwei Geraden auf der Seite, auf der die Winkel weniger als zwei rechte Winkel sind.

Das letzte Postulat unterscheidet sich deutlich durch seine scheinbare Kompliziertheit durch die vier anderen. Zur Verdeutlichung zeigt Abbildung 1.1 eine Skizze des Sachverhalts.

Das 5. Postulat heißt *Parallelenpostulat*. Über zwei Jahrtausende wurde versucht, dieses 5. Postulat aus den restlichen 4 Postulaten herzuleiten, weil es als zu komplex angesehen wurde und man dachte, es sei überflüssig. Die Suche nach dieser Herleitung fand ein Ende, als es einigen Mathematikern (Bolyai und Lobachevsky) gelang, aufgrund der ersten 4 Postulate eine in sich konsistente Geometrie zu entwicklen, in der das 5. Postulat nicht gilt. Der Schock, der der Mathematik dadurch versetzt wurde, war durchaus vergleichbar mit der Entdeckung der Griechen, dass es irrationale Zahlen gibt. Gauß

[1] Tatsächlich waren die Ausführungen Euklids nicht mathematisch streng genug. Um alle Lücken zu schließen, benötigte Hilbert 15 weitere Postulate

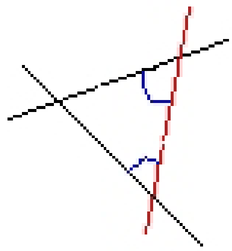

Abbildung 1.1: Zwei Geraden (schwarz) werden von einer Geraden (rot) geschnitten. Die Innenwinkel auf einer Seite (blau) sind weniger als zwei rechte Winkel. Daher schneiden sich die zwei Geraden auf diese Seite.

z.B. entdeckte die nicht-euklidische Geometrie vor den oben genannten Mathematikern, traute sich aber nicht, seine Arbeiten zu veröffentlichen.

Die Beweisversuche des 5. Postulats scheiterten, weil sie alle Aussagen verwendeten, die dem Parallelenpostulat äquivalent sind. Hier ist eine kleine Auswahl an äquivalenten Aussagen [2]:

- Es existiert ein Paar ähnlicher nichtkongruenter Dreiecke.
- Es existiert ein Paar Geraden, die überall äquidistant sind.
- Für drei beliebige nicht kollineare Punkte existiert eine Kreislinie, die durch sie geht.
- Wenn drei Winkel eines Vierecks rechte Winkel sind, dann ist der vierte Winkel ebenfalls ein rechter Winkel.
- Wenn eine Gerade eine von zwei Parallelen schneidet, dann schneidet sie auch die andere.
- Geraden, die parallel zu einer dritteln Geraden sind, sind parallel untereinander.
- Zwei Geraden, die sich gegenseitig schneiden, können nicht parallel zu einer dritten sein.
- Es gibt keine obere Grenze für den Flächeninhalt eines Dreiecks.
- Die Summe der Kathetenquadrate eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Hypothenusenquadrat.

Die letzte Aussage gibt einen wichtigen Hinweis bezüglich der Metrik eines nicht-euklidischen Raums: Sie kann nicht durch den Satz des Pythagoras gegeben sein!

[2] Um uns die Gültigkeit dieser Aussagen vor Augen zu führen sei bemerkt, dass wir hier ausschließlich den zweidimensionalen euklidischen Raum betrachten!

Allgemein bezeichnet man eine Geometrie, in der nicht die 5 euklidischen Postulate (in vollem Umfang) gelten, als *nicht-euklidische Geometrie*. Euklid selbst benutzte für seine ersten 28 Sätze nur die ersten 4 Postulate. Erst beim Beweis des 29. Satzes musste er das Parallelenpostulat einführen. Die Geometrie, die nur auf den ersten 4 euklidischen Postulaten aufbaut, bezeichnet man als *absolute Geometrie*. Ihre Sätze sind mit Sicherheit gültig, unabhängig von der Einführung weiterer Axiome.

Das Parallelenpostulat ist äquivalent zu der Aussage „durch einen Punkt P geht genau eine Gerade in der Art, dass sie eine gegebene Gerade G nicht schneidet (wenn P nicht auf G liegt)“. Durch Änderung dieses Postulats kommt man zu nicht-euklidischen Geometrien:

Elliptische (oder *Riemannsche*) *Geometrie*:
Anstatt des Parallelenpostulats gilt das Axiom „durch einen Punkt P geht keine Gerade in der Art, dass sie eine gegebene Gerade G nicht schneidet (wenn P nicht auf G liegt)“. Als Modell einer elliptischen Geometrie kann die Oberfläche einer Kugel genommen werden, auf der die Linien den (euklidischen) Großkreisen entsprechen. In der elliptischen Geometrie ist die Summe der Winkel in einem Dreieck größer als 180°.

Hyperbolische Geometrie:
Anstatt des Parallelenpostulats gilt das Axiom „durch einen Punkt P gehen unendlich viele Geraden in der Art, dass sie eine gegebene Gerade G nicht schneiden (wenn P nicht auf G liegt)“. In der hyperbolischen Geometrie ist die Summe der Winkel in einem Dreieck kleiner als 180°.

In dieser Notation wird die euklidische Geometrie auch als *parabolische Geometrie* bezeichnet.

Im Folgenden werden wir uns näher mit Modellen der hyperbolischen Geometrie und ihren geometrischen Eigenheiten befassen.

Modelle der hyperbolischen Geometrie

Zur Visualisierung der hyperbolischen Geometrie existieren mehrere Modelle. Alle benutzen zwangsläufig Elemente der euklidischen Geometrie, allerdings in einem ganz anderen Zusammenhang. Anders als bei der euklidischen Geometrie kann z.B. ein Polygon in jedem der Modelle komplett anders aussehen, obwohl es dieselbe Punktmenge beschreibt. Das liegt daran, dass jedes Modell eine eigene Metrik besitzt. Um das klarzustellen: Es gibt nur eine hyperbolische Geometrie, aber mehrere Möglichkeiten, sie darzustellen.

Klein-Beltrami-Modell

Dieses Modell ist wohl das einfachste überhaupt. Es besteht aus einem offenen[3] Einheitskreis. Den hyperbolischen Geraden entsprechen euklidische Kreissehnen. Abbildung 1.2 zeigt drei Geraden.

In der hyperbolischen Geometrie unterscheidet man zwei Sorten von parallelen Geraden. Geraden, die keinen Punkt gemeinsam haben, sich aber am Rand des Modells (im

[3] „offen“ bedeutet, dass die Kreislinie selbst nicht mehr dazugehört

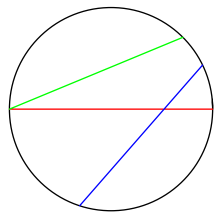

Abbildung 1.2: Drei Geraden im Klein-Beltrami-Modell.

Unendlichen) treffen, heißen *asymptotisch parallel* (in der Skizze sind das die rote und die grüne Gerade). Geraden, die sich weder im Modell noch am Rand treffen, nennt man *divergent* oder *ultraparallel* (in der Skizze grün und blau).

Wie man sofort sieht, hat der Satz, dass Geraden, die zu einer dritten parallel sind, auch untereinander parallel sein müssen, in der hyperbolischen Geometrie keine Gültigkeit mehr (die rote und blaue Gerade sind zur grünen parallel, schneiden sich aber). Das ist auch nicht möglich, denn diese Aussage ist äquivalent zum Parallelenaxiom.

Wir haben gesagt, dass wir (hyperbolische) Geraden als (euklidische) Kreissehnen verstehen. Damit ist unser Modell aber noch nicht vollständig, denn nach dem 2. Axiom müssen wir Geraden beliebiger Länge zeichnen können. Da unser Modell ein euklidischer Einheitskreis ist, müssen wir die Metrik entsprechend anpassen. Sind P_1, P_2 zwei Punkte im Einheitskreis und $(x_1|y_1)$ bzw. $(x_2|y_2)$ ihre euklidischen Koordinaten, so beträgt ihre Entfernung im hyperbolischen Raum

$$d(P_1, P_2) = \operatorname{arcosh} \frac{1 - x_1 x_2 - y_1 y_2}{\sqrt{(1 - x_1^2 - y_1^2)(1 - x_2^2 - y_2^2)}}.$$

Die Distanzfunktion $d(O, P)$ ist radialsymmetrisch zum Ursprung O und hat auf dem Rand des Modells einen Pol. Dadurch wird erreicht, dass Punkte auf der Kreislinie eine unendliche Entfernung vom Koordinatenursprung haben.

Durch die andersartige Metrik wird nicht nur die Längenmessung, sondern auch die Winkelmessung verzerrt. So lässt sich im Klein-Beltrami-Modell nicht mehr durch bloßes Hinsehen entscheiden, ob zwei Geraden senkrecht aufeinander stehen. Es gibt jedoch eine geometrische Konstruktion, die darüber Klarheit verschafft.

1. Wenn eine der beiden Geraden ein Durchmesser des Modell-Kreises ist, sind sie hyperbolisch senkrecht genau dann, wenn sie senkrecht im euklidischen Sinn sind.

2. Wenn keine von ihnen ein Durchmesser ist, sind sie hyperbolisch senkrecht genau dann, wenn die euklidische Gerade, die eine der Sehnen erweitert, durch den Pol[4] der anderen Sehne geht.

Poincaré-Modell

Es gibt einen schönen Übergang vom Klein-Beltrami-Modell zum Poincaré-Modell. Stellen wir uns vor, über dem Klein-Beltrami-Kreis in der Ebene befindet sich eine Kugel

[4] Der Pol einer Sehne ist der Schnittpunkt der Tangenten, die an ihren Endpunkten gezeichnet werden.

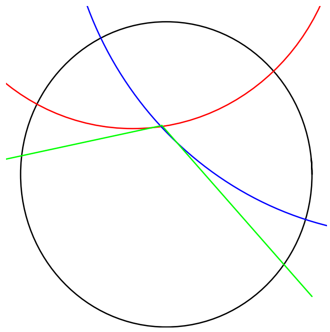

Abbildung 1.3: Winkelmessung im Poincaré-Modell.

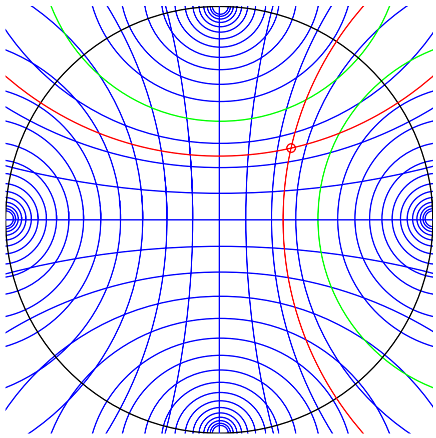

Abbildung 1.4: Koordinatenbestimmung im Poincaré-Modell.

mit gleichem Druchmesser wie der Kreis, und zwar so, dass er die Ebene im Ursprung berührt. Wenn nun die Sehnen senkrecht nach oben auf die untere Halbkugel der Kugel projeziert werden, werden sie Bögen von Kreisen senkrecht zum Äquator der Kugel. Projeziert man die untere Halbkugel stereographisch vom Nordpol der Kugel aus zurück auf die Ebene, wird der Äquator zu einem Kreis, der größer ist als der ursprüngliche Kreis, und die ursprünglichen Sehnen werden jetzt Kreisbögen von Kreisen, die senkrecht zum Äquatorkreis stehen. Diese Kreisbögen sind im Poincaré-Modell die hyperbolischen Geraden. Wird der projezierte Äquatorkreis so normiert, dass wir wieder den Einheitskreis haben, so erhalten wir das Poincaré-Modell.

Die Metrik dieses Modells ist

$$d(P_1, P_2) = 2\,\operatorname{artanh}\left|\frac{x_1 + iy_1 - (x_2 + iy_2)}{1 - (x_2 + iy_2)(x_1 - iy_1)}\right|.$$

$d(O, P)$ ist ebenfalls radialsymmetrisch zum Ursprung und hat die Kreislinie als Pol. Anders als beim Klein-Beltrami-Modell verzerrt diese Metrik jedoch nicht die Winkelmessung (siehe Abbildung 1.3). Um den Winkel zwischen zwei Geraden (rot und blau) zu messen, messen wir den Winkel zwischen den euklidischen Tangenten an die Kreisbögen (grün).

Man sieht an der Skizze schön, dass die (euklidischen) Kreisbögen senkrecht zum Modellrand stehen. Je weiter die Randpunkte der Kreisbögen voneinander entfernt sind, desto gerader wird der Kreisbogen. Im Grenzfall gegenüberliegender Punkte erhält man einen Durchmesser statt eines Kreisbogens, was einem Kreisbogen mit unendlichem Radius entspricht. Es ist deshalb richtiger zu sagen, Geraden sind im Poincaré-Modell euklidische Kreisbögen oder Durchmesser.

Wie werden uns nun näher mit dem hyperbolischen Koordinatensystem im Poincaré-Modell beschäftigen. In einer euklidischen Ebene erhält man ein Koordinatengitter, indem man parallel zur y-Achse in gleichen Abständen die x-Achse senkrecht schneidende Geraden zieht und umgekeht. Dasselbe funktioniert auch im Poincaré-Modell, wie Abbildung 1.4 zeigt. Dort sind die Geraden im Abstand von 0.25 aufgetragen. Wie die Metrik vermuten lässt, rücken die Geraden (im euklidischen Raum) näher aneinander, je näher man dem Rand kommt.

Der Punkt mit den Koordinaten $(x|y)$ befindet sich dort, wo der senkrechte Abstand von der y-Achse x und von der x-Achse y beträgt. In einem euklidischen Koordinatensystem können wir dazu einfach zunächst x Einheiten senkrecht zur y-Achse gehen, und danach y Einheiten senkrecht zur x-Achse. Das funktioniert in unserem Koordinatensystem nicht mehr. Denn suchen wir z.B. den Punkt $(1|1)$, so sehen wir, dass sich die Geraden $y = 1$ und $x = 1$ (grün) nicht schneiden!

Es mag zunächst scheinen, dass der Punkt $(1|1)$ gar nicht existiert. Tatsächlich ist der Punkt in der Skizze rot dargestellt. Die Länge der Senkrechten von $(1|1)$ zur x-Achse ist 1, aber der Abstand vom Ursprung zum Punkt wo die Senkrechte die x-Achse schneidet ist 0.7! Das liegt einfach daran, dass die Punkte mit zunehmender Entfernung vom Ursrung immer dichter aneinander rücken.

Obere Halbebene

Dieses Modell ist das erste nicht radialsymmetrische Modell, das wir betrachten. Es besteht aus der oberen Hälfte einer euklidischen Ebene und der Metrik

$$d(P_1, P_2) = \operatorname{arcosh}\left(1 + \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{2y_1y_2}\right).$$

Wie man sieht, ist hier die x-Achse Pol und gehört daher nicht zum Modell. Den hyperbolischen Geraden entsprechen nun euklidische Kreisbögen, die auf der x-Achse ihren Mittelpunkt haben. Auch hier gibt es wieder einen Grenzfall, wenn der Radius unendlich wird. Dann erhalten wir eine Gerade, die zur x-Achse senkrecht steht.

In Abbildung 1.5 sind drei Geraden eingezeichnet. Die rote und die grüne Gerade sind asymptotisch parallel, wogegen die blaue und die rote Gerade ultraparallel sind. Wie im Poincaré-Modell wird durch die Metrik die Winkelmessung nicht verzerrt. Wie dort erhält man den Winkel zwischen zwei hyperbolischen Geraden, indem man die euklidischen Tangenten an die Kreisbögen zeichnet und deren Winkel bestimmt.

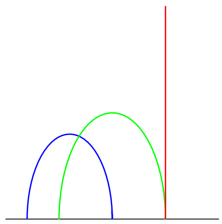

Abbildung 1.5: Parallele Geraden in der oberen Halbebene.

Minkowski-Modell

Das Minkowski-Modell ist wohl das komplizierteste aller hier vorgestellten Modelle. Das liegt daran, dass es sich eines dreidimensionalen euklidischen Analogons bedient, um eine zweidimensionale hyperbolische Ebene zu definieren. Genauer: Das Minkowski-Modell verwendet die Oberfläche der oberen Hälfte des zweischaligen Hyperboloids, die durch $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ mit $z \geq 1$ gegeben ist. Hyperbolische Geraden entsprechen in diesem Modell dem Schnitt dieser Hyperboloidschale mit euklidischen Ebenen, die durch den (euklidischen) Ursprung gehen. Diese Schnitte sind nichts anderes als Hyperbeln.

Euklidische vs. hyperbolische Geometrie

Wir alle sind vertraut mit den wichtigsten Sätzen der euklidischen Geometrie. Doch ändert man nur ein Axiom, namentlich das fünfte, so erkennen wir die Pendants dieser Sätze in der hyperbolischen Geometrie nicht wieder. Wir haben bereits gesehen, dass einer der grundlegendsten Sätze Euklids, der Satz des Pythagoras, ohne das Parallelenpostulat seine Gültigkeit verliert. Im Folgenden findet sich eine Zusammenstellung von Gemeinsamkeiten und Gegensätzen der euklidischen und hyperbolischen Geometrie.

Gemeinsamkeiten

Es stellt sich heraus, dass selbst bei der Änderung nur eines Axioms nur die elementarsten Sätze Gültigkeit in beiden Geometrien haben.

In der euklidischen Geometrie gibt es durch zwei Punkte genau eine Gerade. Das gilt auch in der hyperbolischen Geometrie.

In der euklidischen Geometrie gibt es genau eine kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten, und zwar eine Gerade. Das gilt auch in der hyperbolischen Geometrie.

Unterschiede

Einige Unterschiede wurden schon hier aufgeführt, weil diese Aussagen als äquivalent zum Parallelenpostulat entlarvt wurden.

Hier ein noch elementarerer Unterschied: In der euklidischen Geometrie haben unendlich lange Geraden keinen Grenzpunkt (d.h. einen Punkt, auf den sie zulaufen, aber nie erreichen). Das Gegenteil ist wahr für hyperbolische Geraden.

In der euklidischen Geometrie lassen sich reguläre Polygone mit beliebig vielen Seiten und Winkeln konstruieren. Das geht in der hyperbolischen Geometrie nicht: Hier gibt es z.B. keine Rechtecke, geschweige denn Quadrate! Wenn drei Winkel eines Vierecks 90° sind, dann muss der vierte Winkel spitz sein.

In der hyperbolischen Geometrie ist der Flächeninhalt eines Dreiecks $\neq 1/2\cdot$ Grundseite $\cdot$ Höhe. Tatsächlich hängt der Flächeninhalt allein von den Winkeln ab. $\Rightarrow$ Es gibt keine ähnlichen Dreiecke!

Formeln

Hier sind ein paar Formeln aus der hyperbolischen Geometrie. A, B, C seien die Seiten eines hyperbolischen Dreiecks; α, β, γ die gegenüberliegenden Innenwinkel. Im hyperbolischen Dreieck gilt der Sinussatz

$$\frac{\sinh A}{\sin \alpha} = \frac{\sinh B}{\sin \beta} = \frac{\sinh C}{\sin \gamma}.$$

Die Länge einer Dreiecksseite lässt sich allein durch die Innenwinkel berechnen

$$\cosh A = \frac{(\cos \alpha)(\cos \gamma) + \cos \alpha}{(\sin \beta)(\sin \gamma)}$$

oder mit einer Art Kosinussatz

$$\cosh A = (\cosh B)(\cosh C) - (\sinh B)(\sinh C)(\cos \alpha).$$

Die Fläche eines Dreiecks ist $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$. Daraus folgt: Die Innenwinkelsumme im hyperbolschen Dreieck ist kleiner als 180°!
Sind θ_i die Innenwinkel eines Polygons, so beträgt seine Fläche $(n-2)\pi - (\theta_1 + \ldots + \theta_n)$.
Zu guter Letzt der Kreis:

$$\begin{aligned} \text{Umfang} &= 2\pi \sinh r \\ \text{Fläche} &= 4\pi \sinh^2 \frac{r}{2}. \end{aligned}$$