Bernoulli-Zahlen, Zetafunktion und Summen von Potenzen

Thomas Peters
Thomas' Mathe-Seiten
www.mathe-seiten.de

4. Mai 2010

Die Bernoulli-Zahlen gehören zu den wichtigsten Konstanten der Mathematik. Wir leiten hier einige ihrer Eigenschaften ab und benutzen sie, um bestimmte Werte der Riemann'schen Zetafunktion zu berechnen sowie eine geschlossene Formel für Summen von Potenzen zu finden.

Definition der Bernoulli-Zahlen

Wir betrachten die Funktion f, die für $x \neq 0$ durch

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$$

gegeben ist und im Ursrpung durch $f(0) = 1$ stetig fortgesetzt wird, wie die Regel von de l'Hospital zeigt. In der Tat kann man auch jede Ableitung von f in $x = 0$ stetig fortsetzen. Daher können wir in einer Umgebung des Ursprungs die Taylor-Entwicklung von f betrachten. Diese setzen wir an in der Form

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n.$$

Die Koeffizienten B_n heißen *Bernoulli-Zahlen*[1]. Berücksichtigt man, dass die Exponentialfunktion durch

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

gegeben ist, so kann man f als

$$f(x) = \frac{x}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1} = \frac{x}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} \right)^{-1}$$

darstellen. Also erhalten wir durch Vergleich mit dem Potenzreihenansatz insgesamt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} \right) = 1.$$

Dieses Produkt können wir ausmultiplizieren zu

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n+k=m} \frac{B_n}{n!(k+1)!} x^{n+k} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{B_n}{n!(m-n+1)!} x^m.$$

Mit dem Binomialkoeffizienten

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$$

[1] Leider gibt es in der Literatur verschiedene Konventionen, die Bernoulli-Zahlen zu bezeichnen.

bekommt man also

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{m}\binom{m+1}{n}B_n\right]\frac{x^m}{(m+1)!}=1.$$

Nun führen wir einen Koeffizientenvergleich durch. Ein Vergleich der konstanten Terme liefert sofort $B_0=1$. Weiter kann die Gleichung nur erfüllt sein, wenn der Term in der eckigen Klammer für alle $m\geq 1$ verschwindet, d. h. wenn

$$\sum_{n=0}^{m}\binom{m+1}{n}B_n=0$$

ist. Dies ist eine rekursive Gleichung zur Bestimmung von B_m aus B_0 bis B_{m-1}. So erhält man für $m=2$

$$B_0+\frac{1}{2}B_1=0,$$

also $B_1=-1/2$. Die ersten Bernoulli-Zahlen sind $B_2=1/6$, $B_3=0$, $B_4=-1/30$, $B_5=0$, $B_6=1/42$. Rechnet man noch weiter, so kommt man schnell zu der Vermutung, dass die Bernoulli-Zahlen B_{2k+1} für alle $k\geq 1$ verschwinden. Um dies einzusehen, erinnern wir an die Hyperbelfunktionen

$$\cosh x=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$$

und

$$\sinh x=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

Offenbar ist cosh gerade und sinh ungerade. Folglich ist

$$\begin{aligned}\frac{x}{2}\cdot\frac{\cosh x/2}{\sinh x/2}&=\frac{x}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{x/2}+\mathrm{e}^{-x/2}}{\mathrm{e}^{x/2}-\mathrm{e}^{-x/2}}=\frac{x}{2}\cdot\frac{1+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}=\frac{x}{2}\cdot\frac{2+\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x-1}\\&=\frac{2x+x(\mathrm{e}^x-1)}{2(\mathrm{e}^x-1)}=\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}+\frac{x}{2}=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n\end{aligned}$$

eine gerade Funktion, weshalb alle Koeffizienten von ungeraden Potenzen verschwinden müssen.

Berechnung von $\zeta(2k)$

Die *Riemann'sche Zetafunktion* ist eine der wichtigsten speziellen Funktionen. Wir wählen für unsere Zwecke die Reihendarstellung

$$\zeta(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^x}.$$

Über die Zahlen $\zeta(2k+1)$ ist sehr wenig bekannt, aber erstaunlicherweise gibt es eine geschlossene Formel für die Werte $\zeta(2k)$. Um sie abzuleiten, benötigen wir die im Artikel über Fourier-Reihen besprochene *Partialbruchzerlegung des Cotangens*

$$\pi \cot \pi y = \frac{1}{y} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2y}{y^2 - n^2}.$$

Wegen $\cot \mathrm{i}y = -\mathrm{i} \coth y$ erhalten wir daraus sofort

$$\pi \coth \pi y = \frac{1}{y} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2y}{y^2 + n^2}.$$

Wählen wir speziell $\pi y = x/2$, so ergibt sich

$$\frac{x}{2} \coth \frac{x}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 4\pi^2 n^2}.$$

Andererseits haben wir gerade

$$\frac{x}{2} \coth \frac{x}{2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k}$$

ausgerechnet. Wir erhalten somit durch Vergleich der beiden Darstellungen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 4\pi^2 n^2}.$$

An dieser Stelle sei an die *geometrische Summenformel*

$$\sum_{k=p}^{q} z^k = \frac{z^p - z^{q+1}}{1 - z}$$

und insbesondere an die Formel für die *geometrische Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k = \frac{z}{1 - z}$$

erinnert. Mit ihr bekommen wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left(\frac{x}{2\pi n}\right)^{2k} = -\frac{-\dfrac{x^2}{4\pi^2 n^2}}{1 + \dfrac{x^2}{4\pi^2 n^2}} = \frac{x^2}{x^2 + 4\pi^2 n^2}$$

und somit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{x^2 + 4\pi^2 n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[(-1)^{k-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi n)^{2k}} \right] x^{2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k}.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi n)^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1} B_{2k}}{2(2k)!}$$

und schließlich

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1}(2\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!}.$$

Damit erhalten wir nicht nur das bereits bei den Fourier-Reihen erzielte Resultat

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

zurück, sondern zusätzlich

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

und viele weitere. Übrigens zeigt die Formel für $\zeta(2k)$, dass die nicht verschwindenden Bernoulli-Zahlen ständig wechselnde Vorzeichen haben, da $\zeta(2k)$ positiv ist, wie die Reihendarstellung der Zetafunktion lehrt.

Potenzreihen

Die Bernoulli-Zahlen tauchen in vielen Potenzreihen-Darstellungen spezieller Funktionen auf. Wir kennen bereits die Formel

$$\frac{x}{2} \coth \frac{x}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k},$$

welche natürlich zu

$$x \coth x = \sum_{k=0}^{\infty} 4^k \frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k}$$

äquivalent ist. Wegen $\cot y = \mathrm{i} \coth \mathrm{i}y$ gilt analog

$$x \cot x = \sum_{k=0}^{\infty} (-4)^k \frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k}.$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

und der Beziehungen $\sin \mathrm{i}y = \mathrm{i} \sinh y$, $\cos \mathrm{i}y = \cosh y$ erhält man für die Hyperbelfunktionen die Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sinh 2\alpha &= 2 \sinh \alpha \cosh \alpha \\ \cosh 2\alpha &= \cosh^2 \alpha + \sinh^2 \alpha. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$2\coth 2x - \coth x = 2\frac{\cosh 2x}{\sinh 2x} - \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{\cosh^2 x + \sinh^2 x}{\sinh x \cosh x} - \frac{\cosh^2 x}{\sinh x \cosh x} = \tanh x.$$

Daher erhält man die Reihendarstellung

$$x \tanh x = \sum_{k=0}^{\infty} 4^k \frac{B_{2k}}{(2k)!}(2x)^{2k} - \sum_{k=0}^{\infty} 4^k \frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} 4^k(4^k - 1)\frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k}$$

bzw.

$$\tanh x = \sum_{k=1}^{\infty} 4^k(4^k - 1)\frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1}$$

und mit $\tanh \mathrm{i}y = \mathrm{i} \tan y$ das analoge Ergebnis

$$\tan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-4)^k(1 - 4^k)\frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1}.$$

Summen von Potenzen

Wir benutzen die Bernoulli-Zahlen nun, um geschlossene Formeln für Summen der Form

$$\sum_{k=1}^{n} k^l$$

zu berechnen. Im Fall $l = 1$ ist die Sache einfach. Wir schreiben die Summe einmal in der Form

$$1 + \cdots + n$$

und in umgekehrter Reihenfolge

$$n + \cdots + 1.$$

Addieren wir beide Terme, so erhalten wir n mal den Summanden $n + 1$. Daraus folgt sofort für die Summe

$$1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dies ist die berühmte *Gauß'sche Summenformel*. Es stellt sich natürlich die Frage, ob man auch für $l > 1$ geschlossene Formeln finden kann, und in der Tat gibt es sogar eine für alle l gültige Formel.

Mit Hilfe der geometrischen Summenformel können wir

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{kx} = \frac{1 - \mathrm{e}^{(n+1)x}}{1 - \mathrm{e}^x} = \frac{\mathrm{e}^{(n+1)x} - 1}{x} \cdot \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$$

rechnen. Der rechte Faktor ist natürlich nichts anderes als $f(x)$. Setzt man die Reihenentwicklungen der Exponentialfunktion und die von f ein, so erhält man

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+1)^{k+1}}{(k+1)!}x^k\right)\cdot\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_m}{m!}x^m\right)&=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k+m=l}\frac{(n+1)^{k+1}B_m}{(k+1)!m!}x^{n+m}\\&=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\frac{(n+1)^{l-m+1}B_m}{(l-m+1)!m!}x^l\\&=\sum_{l=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{l}\binom{l+1}{m}(n+1)^{l-m+1}B_m\right]\frac{x^l}{(l+1)!}.\end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{kx}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(kx)^l}{l!}=\sum_{l=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}k^l\right]\frac{x^l}{l!}.$$

Nun folgt durch Koeffizientenvergleich die für alle $l\geq 1$ gültige *Faulhaber'sche Formel*

$$\sum_{k=1}^{n}k^l=\frac{1}{l+1}\sum_{m=0}^{l}\binom{l+1}{m}(n+1)^{l-m+1}B_m.$$

Für den Spezialfall $l=1$ erhält man die bekannte Formel

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}\cdot\left(1(n+1)^2 1+2(n+1)\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{n^2+n}{2}$$

zurück.