Die Bedeutung der Areafunktionen

Thomas Peters
Thomas' Mathe-Seiten
www.mathe-seiten.de

28. März 2003

Die Umkehrfunktionen der hyperbolischen Funktionen heißen Areafunktionen. Woher dieser Name kommt, und wie man ihre Werte anschaulich gewinnen kann, untersuchen wir in diesem Artikel.

Die hyperbolischen Funktionen

Die hyperbolischen Funktionen sind definiert durch

$$\cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

und

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}, \qquad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}.$$

Ähnlich wie die trigonometrischen Funktionen einen Kreis parametrisieren, parametrisieren die hyperbolischen Funktionen einen Hyperbel. Dies sieht man leicht ein, wenn man von der Gleichung der Einheitshyperbel

$$x^2 - y^2 = 1$$

ausgeht und $x = \pm\cosh(t)$ sowie $y = \sinh(t)$ substituiert:

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t} - e^{2t} + 2 - e^{2t}}{4} = 1.$$

Dieser „hyperbolische Pythagoras“ ist nur eine von vielen bemerkenswerten Formeln, die den engen Zusammenhang zwischen trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen widerspiegeln. Diese Ähnlichkeit offenbart sich (wie so oft) am Direktesten im Komplexen, denn dort gilt

$$\cos(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}}{2}, \qquad \sin(x) = \frac{e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}.$$

Die Formeln für die Beziehungen der hyperbolischen Funktionen sind so zahlreich wie die entsprechenden trigonometrischen, so dass wir hier nicht daran denken können, in dieser Richtung weiter zu gehen.

Die Umkehrfunktionen

Wir benötigen für unsere Diskussion nur den hyperbolischen Cosinus und den hyperbolischen Sinus. Für diese beiden Funktionen werden wir nun die Umkehrfunktionen berechnen. Wir setzen

$$y = \frac{\mathrm{e}^x \pm e^{-x}}{2}$$

und multiplizieren mit $2\mathrm{e}^x$. Dann bringen wir alle Terme auf eine Seite und erhalten

$$\mathrm{e}^{2x} - 2y\mathrm{e}^x \pm 1 = 0.$$

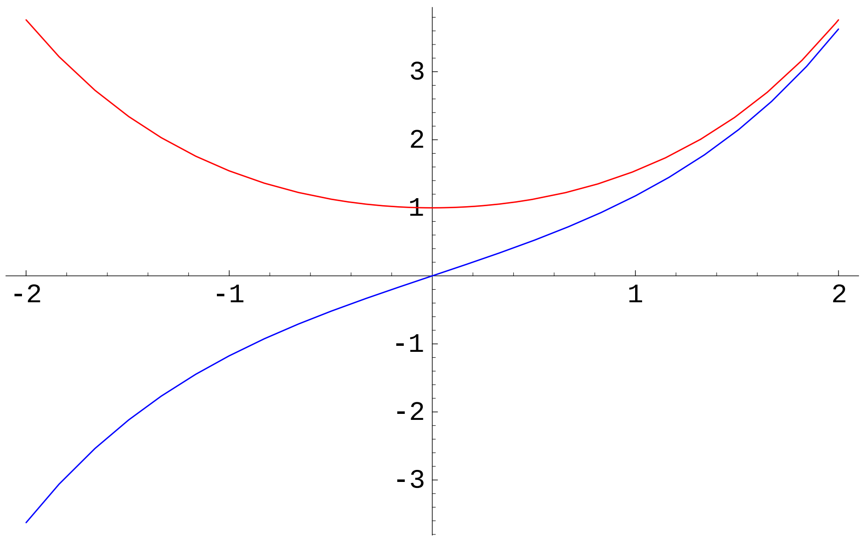

Abbildung 1.1: Die Funktionen $\cosh$ (rot) und $\sinh$ (blau).

Auflösen dieser quadratischen Gleichung in e^x liefert

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 \mp 1}.$$

Da e^x für reelles x stets positiv ist, müssen wir nur das positive Vorzeichen vor der Wurzel berücksichtigen und erhalten somit

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \qquad \operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Diese Funktionen werden als *Areafunktionen* bezeichnet. Doch wieso?

Die Bedeutung der Fläche

Bei den trigonometrischen Funktionen ist die Bedeutung der Umkehrfunktionen klar: Sie geben die Länge des Kreisbogens am Einheitskreis an, die dem gegebenen Wert für $\cos$ bzw. $\sin$ entspricht. Daher auch die Bezeichnung *Arkusfunktionen* für $\arccos$ und $\arcsin$. Haben die Umkehrfunktionen der hyperbolischen Funktionen eine ähnlich anschauliche Bedeutung? Sie haben.

Dazu betrachten wir nur den rechten Ast der Einheitshyperbel. Für jeden Punkt (x, y) dieses Astes können wir ein $t \in \mathbb{R}$ wählen mit $x = \cosh t$ und $y = \sinh t$. Dann ist $|t|$ gleich dem Flächeninhalt des in Abbildung 1.3 eingezeichneten Hyperbelsektors.

Da der Hyperbelast offenbar spiegelsymmetrisch zur x-Achse ist, reicht es, die Fläche der oberen Hälfte des Hyperbelsektors zu berechnen. Dazu ergänzen wir die eingezeichnete Ursprungsgerade zum Punkt (x, y) zu einem Dreieck, indem wir die Gerade von (x, y) nach

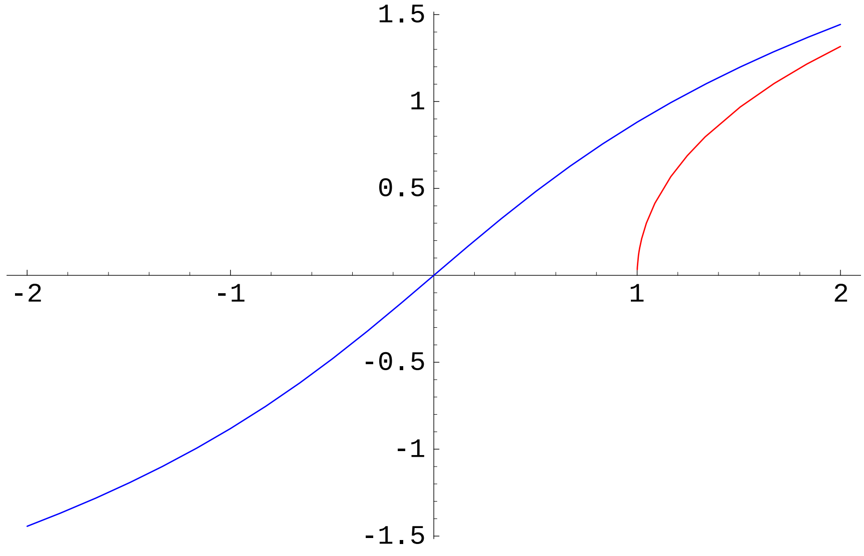

Abbildung 1.2: Die Funktionen arcosh (rot) und arsinh (blau).

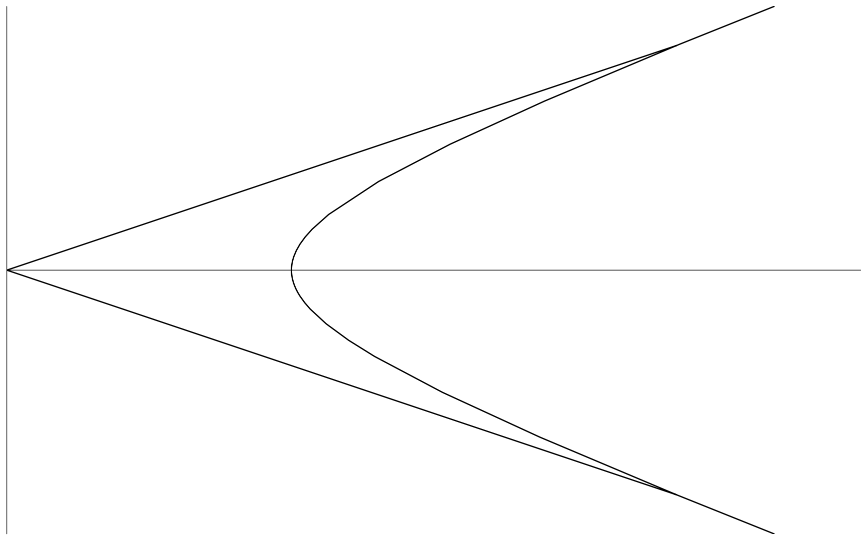

Abbildung 1.3: Der Hyperbelsektor.

$(x,0)$ hinzufügen[1]. Das Dreieck mit den Ecken $(0,0)$, $(x,0)$ und (x,y) hat dann den Flächeninhalt

$$F_D = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}.$$

Die gesuchte Fläche erhalten wir, indem wir hiervon die Fläche unter der Hyperbel

$$F_H = \int_1^x y\,\mathrm{d}x' = \int_1^x \sqrt{x'^2-1}\,\mathrm{d}x'$$

abziehen. Wir benennen der Übersichtlichkeit wegen die Integrationsvariable x' um in s und berechnen das Integral durch partielle Integration:

$$\int_1^x 1\cdot\sqrt{s^2-1}\,\mathrm{d}s = \left[s\sqrt{s^2-1}\right]_1^x - \int_1^x \frac{s^2}{\sqrt{s^2-1}}\,\mathrm{d}s.$$

Dies sieht zwar noch nicht besser aus, aber durch geschickte Nulladdition erhalten wir

$$\int_1^x \sqrt{s^2-1}\,\mathrm{d}s = x\sqrt{x^2-1} - \int_1^x \frac{s^2-1}{\sqrt{s^2-1}}\,\mathrm{d}s - \int_1^x \frac{1}{\sqrt{s^2-1}}\,\mathrm{d}s.$$

Den Integranden im mittleren Term kann man kürzen, so dass wir für unser gesuchtes Integral erhalten

$$2\int_1^x \sqrt{s^2-1}\,\mathrm{d}s = x\sqrt{x^2-1} - \int_1^x \frac{1}{\sqrt{s^2-1}}\,\mathrm{d}s.$$

Eine Stammfunktion des rechten Integranden findet man, wenn man

$$(\mathrm{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

berücksichtigt. Wegen $\mathrm{arcosh}(1) = 0$ folgt dann

$$\int_1^x \sqrt{s^2-1}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\,\mathrm{arcosh} x.$$

Die Fläche des oberen Hyperbelsektors ist nun

$$F_S = F_D - F_H = \frac{1}{2}\,\mathrm{arcosh} x = \frac{1}{2}t,$$

womit die Behauptung bewiesen wäre.

[1]Es sei also $y > 0$. Dann ist auch $t > 0$.